

Varianta 047

Subiectul I

- a) $AB = \sqrt{5}$
b) $(1+i)(3-2i)=a+bi$ și obțin $a=5$ și $b=1$
c) Aria cerută este $\frac{5\sqrt{3}}{4}$
d) Dacă $z=-4+11i$ atunci $\bar{z} = -4-11i$
e) Obținem soluția $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{5}{2} \end{cases}$
f) Cu teorema lui Pitagora $BC = \sqrt{146}$

Subiectul II

1.
a) $\begin{vmatrix} -11 & 2 \\ 10 & 3 \end{vmatrix} = -53$
b) Probabilitatea cerută este $\frac{3}{5}$
c) $81^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 81^x = 3 \Leftrightarrow 3^{4x} = 3^1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$
d) $\log_5 x = 2 \Leftrightarrow x = 5^2 = 25$
e) Prin împărțire se obține câtul $X^2 - X$ și restul $2X + 1$
2.
a) $f'(x) = -\frac{14}{x^{15}} \quad \forall x \in \mathbf{R}^*$
b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = -14$
c) Deoarece $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \infty$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ și f e continuă pe $\mathbf{R}^*$ rezultă că $x=0$ asimptotă verticală pentru f
d) $\int_1^2 f(x) dx = \left(x - \frac{x^{-13}}{13} \right) \Big|_1^2 = \frac{14 - 2^{-13}}{13}$
e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^7}{n^7} = 1$

Subiectul III

a) $1 = 3^0 \cdot 2^0; 2 = 3^0 \cdot 2^1; 3 = 2^0 \cdot 3^1; 4 = 2^2 \cdot 3^0$

b) Presupun că $5 \in A \Rightarrow (\exists) i, j \in \mathbf{N}$ cu $5 = 3^i \cdot 2^j$ fals. Pentru 7 obținem $7 = 3^i \cdot 2^j$ cu $i, j \in \mathbf{N}$. Dacă $i, j \in \{0\}$ evident fals, iar pentru $i, j \in \mathbf{N}^*$ fals deoarece 7 nu e multiplu de 3 (sau 2)

c) Pentru $n = 0$ evident $1 = \frac{1-a}{1-a}$; presupun $1 + a + \dots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ și am

$$1 + a + \dots + a^n + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}$$

d) Membrul stâng se scrie $\frac{1 - \frac{1}{2^{k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^{k+1}}) < 2$

e) Membrul stâng este $\frac{1 - \frac{1}{3^{s+1}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{3^{s+1}}) < \frac{3}{2}$

f) Evident $A \cap \{1, 2, 3, \dots, 20\} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18\}$; Răspuns 5

g) Folosind punctele d) și e) obținem că $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < (\sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k})(\sum_{k=0}^n \frac{1}{5^k}) < 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$

Subiectul IV

a) $u'(x) = -\frac{1}{(x+10)^2} - \frac{1}{(x+20)^2} - \frac{1}{(x+30)^2}, (\forall)x \in A$

b) $g(x) = f'(x) = (x+20)(x+30) + (x+10)(x+30) + (x+10)(x+20) = f(x) \cdot u(x), (\forall)x \in A$

c) Din a) evident $u'(x) < 0, (\forall)x \in A$

d) Din b) $u(x) = \frac{g(x)}{f(x)}, (\forall)x \in A \Rightarrow u'(x) = \frac{g'(x) \cdot f(x) - g(x) \cdot f'(x)}{f^2(x)} = \frac{f(x) \cdot h(x) - g^2(x)}{f^2(x)}, (\forall)x \in A$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală către $+\infty$.

f) $\int_0^1 u(x) dx = [\ln(x+10) + \ln(x+20) + \ln(x+30)]_0^1 = \ln 11 + \ln 21 + \ln 31 - \ln 10 - \ln 20 - \ln 30 = \ln \frac{11 \cdot 21 \cdot 31}{10 \cdot 20 \cdot 30}$

g) Folosind c) și d) obținem că $f(x) \cdot h(x) - g^2(x) < 0, (\forall)x \in A \Rightarrow g^2(x) > f(x) \cdot h(x), (\forall)x \in A$